定数係数対称双曲型方程式系の半空間における混合問題の解の挙動について (函数解析的方法による解析学研究会報告集)

松村, 睦豪

数理解析研究所講究録
59巻 1968年 140-172

定数係数対称双曲型方程式系の半空間における混合問題の解の挙動について

京大工　松村睦豪

§0. 序

3次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ 内のなめらかな compact closed surface を境界とする外部領域 G において波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \Delta\, u(t,x)$$

を満足し，初期条件

$$u(0,x) = g_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g_1(x) \quad (\text{例えば } g_0, g_1 \in C_0^\infty(G))$$

および境界条件

$$u(t,x)\Big|_{x\in\partial G} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial u}{\partial n}(t,x)\Big|_{x\in\partial G} = 0 \quad \left(\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial n} \text{ は } \partial G \text{ における } G \text{ への}\\ \text{内法線方向への微分}\end{array}\right)$$

をみたす解 $u(t,x)$ の $t\to\infty$ での挙動は T. Carleman [3], Wilcox Morawetz [16], Mizohata [14], [15], Lax-Morawetz-Phillips [11] 等によって研究された. Carleman はその著書 [3], Sur les équations intégrales singulières ⋯ (1923年) において今日いわゆる Carleman 型と呼ばれる積分方程式の理論を展開し，その偏微分方程式論への一つの応用として上の問題の解 $u(t,x)$ が $t\to\infty$ のとき G の

各 Compact set 上で一様に 0 に収束することを証明した. 一方 J. Keller は 1959 年頃 hyperbolic equation の解の $t\to\infty$ での挙動が radiation and scattering problems に重要な役割を果すことを指摘した. Wilcox は直ちに scattering obstacle が球の場合 解の特殊函数による explicit な表現式を解析することにより解が $t\to\infty$ のとき G の各 Compact set 上で exponential decay することを示した (A.M.S. Notices, 1959) 続いて C.S. Morawetz は 1961 年 C.P.A.M において obstacle が star shaped の場合, 解が $t\to\infty$ のとき $\frac{1}{\sqrt{t}}$ で減少することを energy method を用いて示した (Dirichet 境界条件のとき). 1963 年 Lax-Morawetz-Phillips は先の Morawetz の結果を用い exponential decay を示した. 他方 S. Mizohata [14] [15] は $\lambda^2-\Delta$ に対する外部境界値問題の Green 函数 $G(x, y; \lambda)$ の λ に関する解析性を示し これを用いて上の問題に対し Carleman とは異なった証明を与えている.

さてこれらの結果はすべて boundary が compact の場合であるが 領域が半空間の場合にこの問題を考察することも興味があるように思われる. しかしこの場合にはもはや上のような積分方程式論を用いる方法や Morawetz の如き巧妙な技巧を用いた energy method は有効でないように思われる. こゝでは半空間の特性を利用した Fourier-Laplace 変換の方法を用い, 定数係数一階対称双曲型方程式系の半空間における混合問題に対し 方程式と境界条件について後に正確に述べられる仮定の下で 解が $t\to\infty$ のとき

半空間$\mathbf{R}^n_+$の各 Compact set 上で一様に0に収束することを示す。(空間次元$n \geq 2$)。その証明方針を標語的に云えば，混合問題に attach される自己共役作用素の spectral measure が原点を除いて絶対連続(もちろん$\mathbf{R}^1$上の Lebesgue measure に関し)であることを stationary problem の Green 函数を構成しその性質から導くことである。

§1. 混合問題に関する若干の予備知識と問題の正確な設定

n次元 Euclid 空間$\mathbf{R}^n$の half-space $\{x=(x', x_n), x_n>0\}$を$\mathbf{R}^n_+$で表わす。こゝに$x'=(x_1 \cdots x_{n-1})$である。次の形の微分作用素

$$L = I\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

を考えよう。こゝでIはN次単位行列でA_jは$N\times N$ Constant hermitian matrices である。従ってLは対称双曲型作用素になる。吾々はLに対する半空間$\mathbf{R}^n_+$における次の初期-境界値混合問題

$$\begin{cases} L[u(t,x)] = 0 & t>0, \quad x\in\mathbf{R}^n_+ \\ \text{初期条件:}\ u(0,x)=g(x) & x\in\mathbf{R}^n_+ \\ \text{境界条件:}\ Bu(0,x)\Big|_{x_n=0} = 0 & \end{cases}$$

を考える。u及びgは複素数値函数を要素とする$N\times 1$行列である。Bは境界において解$u(t,x)$が満足すべきl個の linear relations を表わす$l\times N$ Constant matrix で rank $B=l$とする。行列Bを境界条件と呼ぶこともある。

$\mathbf{C}^k$でk次元 complex number space を表わそう。

$\mathbf{C}^N$, $\mathbf{C}^l$ に canonical bases を固定し $\mathbf{C}^N \to \mathbf{C}^l$ なる linear mapping の表現行列が B であるような operator をやはり B で記すことにし <u>boundary operator</u> と呼ぶ．また

$$\mathcal{B} = \ker B$$

とおく．$\mathcal{B}$ は <u>boundary space</u> と呼ばれる．

$x_n = 0$ において境界条件を与えることに留意し quadratic form $A_n\xi\cdot\bar{\xi}$, $\xi \in \mathbf{C}^N$ を考える．

<u>定義 1</u>

$\mathcal{B}$ 上で $A_n\xi\cdot\bar{\xi} \geqq 0$ のとき boundary condition B 或いは boundary space $\mathcal{B}$ は <u>dissipative</u> であると云う．特に

$\mathcal{B} \ni {}^\forall\xi \neq 0$ に対し $A_n\xi\cdot\bar{\xi} > 0$ のとき <u>strictly dissipative</u>

$\mathcal{B} \ni {}^\forall\xi$ に対し $A_n\xi\cdot\bar{\xi} = 0$ のとき <u>energy-preserving</u> or <u>conservative</u>

と云う．また

$\mathcal{B} \ni {}^\forall\xi \neq 0$ に対し $A_n\xi\cdot\bar{\xi} < 0$ ならば <u>accretive</u> と呼ばれる．

<u>定義 2</u>

$\mathcal{B}$ を真部分空間として含む $\mathbf{C}^N$ の部分空間でその上で $A_n\xi\cdot\bar{\xi} \geqq 0$ (resp. > 0 for $\xi \neq 0$, resp. $= 0$) が成りたつものが存在しないとき boundary space $\mathcal{B}$ は <u>maximally dissipative</u> (resp. maximally strictly dissipative, maximally conservative) と呼ばれる．

境界における linear relations の数 l を少くすれば $\mathcal{N}$ の次元は増大することに注意すれば上の条件は境界条件を課し過ぎることを排除するものである. 従って上の性質をそれぞれ boundary condition B は minimally dissipative, minimally strictly dissipative, minimally conservative と云うことができる.

さて行列 A_n が non singular な場合 B が minimality をもてば境界における linear relations の数 l は Hermit 行列 A_n の正の固有値の数（重複度もこめた）に等しい.

よく知られているように対称双曲型方程式系に対する minimally dissipative な境界条件を課す混合問題は L^2-well posed である†

$$A=-i\sum_{j=1}^{n} A_j\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad A(\xi)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j A_j \quad \text{とおく.}$$

さて今 A を <u>elliptic operator</u> 即ち $\Xi^n \ni {}^{\forall}\xi\neq 0$ に対し†† $A(\xi)\neq 0$ がなりたつとしよう.

† 一階対称(双曲)系は Friedrichs によって導入され(1954年), その境界値問題(混合問題)の well posedness は 1958 年以後 Friedrichs Lax, Phillips, Sarason 等により研究された. 例えば [5], [9], [10] をみよ.
そこではもっと一般な即ち変数係数でより一般な領域の場合にも係数の regularity や領域及び A_n に関する適当な仮定の下で L^2-well posedness が確立されている.

†† Ξ^n は $\mathbb{R}^n$ の real dual space でその duality は $\langle x,\xi\rangle=\sum_{j=1}^{n}x_j\xi_j$ で与えられるものとする.

定義3

boundary condition B (or boundary space $\mathfrak{B}$) が Coercive for A とは適当な $C>0$ が存在し $v \in C^\infty(\overline{R^n_+})$ で，有界な support をもち $v(x)\big|_{x_n=0} \in \mathfrak{B}$ となる任意の v に対し

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\| \leq C \left(\| A v \| + \| v \| \right)$$

が成り立つことを云う. こゝで $\| \ \|$ は $\| \ \|_{L^2(R^n_+)}$ を意味する.

λ を complex parameter として行列

$$M(\xi';\lambda) = A_n^{-1} \left(\lambda I - \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j A_j \right)$$

を考えよう. hyperbolicity より次の事実が従う.†

"λ が実数でなければ $\Xi^{n-1} \ni \forall \xi'$ に対し $M(\xi';\lambda)$ の特性根は決して real にはならない"

また A が elliptic の場合 $\lambda=0$ のときも $\Xi^{n-1} \ni \forall \xi' \neq 0$ に対しそうである. そこで $\lambda \neq$ real か或いは $\lambda=0$ のとき imaginary part が正 (resp. 負) であるような $M(\xi';\lambda)$ の特性根に対応する (generalized) eigenvectors によって張られる $\mathbb{C}^\nu$ の部分空間を $E^+(\xi';\lambda)$ (resp. $E^-(\xi';\lambda)$) で表わし $M(\xi';\lambda)$ の positive eigenspace (resp. negative eigenspace) と呼ぶ

$\lambda \neq$ real で $\Xi^{n-1} \ni \xi'$, $\overbrace{\text{或いは } \lambda=0 \text{ で } \Xi^{n-1} \ni \xi' \neq 0}^{A\text{がellipticの時}}$ に対し

$$E^+(\xi';\lambda) \oplus E^-(\xi';\lambda) = \mathbb{C}^\nu$$

である.

† もちろん一般には A の ellipticity を仮定しないで考える. たゞしそのとき A_n が non singular であることは仮定する.

そしてAがellipticであれば $N=2m$ で

$$\dim E^{+}(\xi':\lambda)=\dim E^{-}(\xi':\lambda)$$

となる. たゞし空間次元 $n=2$ のときはこれを仮定する.

<u>Lemma</u>

Bが一階対称楕円型作用素Aに対するcoercive boundary conditionである為の必要且十分条件は

i) $\ell=m\ (=\frac{N}{2})$

ii) $\mathcal{B}\cap E^{+}(\xi';0)=\{0\}\quad \forall\xi'\neq 0$

が成り立つことである.

Lax and Phillips [10] による.

以上の準備の下で吾々の仮定と主要定理を述べよう.

(I) "<u>作用素Lに関する仮定</u>"

L.1) 対称双曲系Lはstrictly hyperbolicである. すなわち λ についての代数方程式 $\det(\lambda I-\sum_{1}^{n}\xi_j A_j)=0$ の根は $\Xi^n\ni\forall\xi\neq 0$ に対し (real) distinct.

L.2) Lの伝播速度は決して0にならない. 云いかえればAはelliptic operatorである.

L.3) Lのnormal surfacesはnonsingularでその上の各点でのGaussian curvature $\neq 0$.

L.4) 行列 $M(\xi';\lambda)$ の特性根は $\lambda\neq$ real, $\forall\xi'\in\Xi^{n-1}$ に対しdistinctで λ がrealのとき $\xi'\neq 0$ に対し実根は夫々double.

(II) "境界条件 B に関する仮定"

B.1) B は minimally conservative である.

B.2) B は coercive for A である.

B.3) strict complementary condition (or uniform Lopatinski condition) for $A-\lambda$:†

boundary operator B は $\lambda \neq$ real のとき $\forall \xi' \in \Xi^{n-1}$ に対し $E^+(\xi';\lambda)$ を $\mathbb{C}^l$ の上への 1-to-1 mapping であり λ が non real で実軸上の各点 $\neq 0$ の適当な近傍を動くとき linear operator $B^{-1}(\xi';\lambda)$ の operator norms は一様に下から押えられる.

注意 1.

条件 B.1), B.2), B.3) の何れからでも $l=m(=\frac{N}{2})$ であることが要請される.

注意 2.

$E^+(\xi';\lambda)$ に長さ 1 の vectors よりなる basis $h_1^+(\xi';\lambda),\cdots,h_m^+(\xi';\lambda)$ をとるとき B.3) は Lopatinski determinant††

$$\det\left(\langle b_i, h_j^+(\xi';\lambda)\rangle\right) \neq 0 \quad \text{for } |\xi'|+|\lambda|^2=1$$

を意味する. たゞし b_i は B の第 i 行 vector で $\langle\ ,\ \rangle$ は real inner product を表わす

注意 3.

条件 (I) L.1), L.2), L.3), L.4) を満足する最も典型的なものは characteristic equations が

$$\det\left(\lambda I-\sum_{j=1}^{n}\xi_j A_j\right)=(\lambda^2-a_1^2|\xi|^2)\cdots(\lambda^2-a_m^2|\xi|^2)$$

$$a_1>\cdots>a_m>0$$

†) elliptic と云っても一階なので Agmon-Douglis-Nirenberg [1] によって取り扱われたものとはやゝ異質なものであるが その理論の analogy からこのように名付けてよい

††) であろう. (Agmon [2], Hersh [8], Sarason [18] 参照)

で与えられる isotropic case すなわち伝播速度（今の場合 $a_1, \cdots, a_m$）が ξ の方向に関係しない場合である.

MAIN THEOREM

作用素 L, 境界条件 B に関する上の仮定の下で混合問題

$$\begin{cases} L[u(t,x)] = 0 \quad , t>0 \ , \quad x \in \mathbb{R}^n_+ \\ u(0,x) = g(x) \qquad\qquad g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+) \\ B\,u(t,x)\big|_{x_n=0} = 0 \end{cases}$$

の解 $u(t,x)$ は $t \to \infty$ のとき $\mathbb{R}^n_+$ の各 compact set 上で一様に 0 に収束する.

仮定(I)をみたす operator L に対する証明も（注3）の isotropic case の場合の証明と本質的な変更を加える必要はないので簡単の為ここでは isotropic の場合について説明し一般の場合は修正すべき点（3ヶ所のみ）を注意するにとどめよう.

主要定理へ到達する為の吾々の plan は次の通りである.

§2. Free space における operator $A - \lambda I$ の基本解とその $|x| \to \infty$ での挙動（$\lambda \to$ real のときの一様評価）.

§3. Poisson kernel の構成.

§4. Green 函数の構成と $\lambda \to$ real のときの性質

§5. 主要定理の証明

以後各§についての説明を行うが詳細については講演者の論文（数研紀要, Series A, vol. 4, No 2. 発表予定）を参照されたい.

§2. Free space における operator $A-\lambda I$ の基本解とその $|x|\to\infty$ での挙動.

吾々は先の注3.において述べた isotropic case について話をすゝめるが,この§の結果は次の条件をみたす作用素 L に対し直ちに一般化できることをまず注意しておく.[†]

L.1') L は次の意味で双曲型である: a) 行列 $\lambda I-A(\xi)$ の特性根は $\forall\xi\in\Xi^n$ に対しすべて real で $\xi\neq 0$ に対し重複度一定

すなわち $\det(\lambda I-A(\xi))=(\lambda-\lambda_1(\xi))^{\nu_1}\cdots(\lambda-\lambda_k(\xi))^{\nu_k}$

$\lambda_1(\xi),\cdots,\lambda_k(\xi)$ は real distinct,

b) 行列 $A(\xi)$ は diagonalisable

L.2') $\lambda_j(\xi)\equiv 0$ or $\lambda_j(\xi)\neq 0$ for $\forall\xi\neq 0$

L.3)

さて λ を non real complex number とするとき微分作用素 $A-\lambda I$ の一つの基本解は

$$E(x;\lambda)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathfrak{F}^{-1}\left[(A(\xi)-\lambda I)^{-1}\right]$$

で与えられる.こゝに $\mathfrak{F}^{-1}$ は Fourier 逆変換を表わす. $f\in L^1(\Xi^n)$ ならば $\mathfrak{F}^{-1}[f]=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}f(\xi)\,d\xi$ で定義される.

$$\lambda=k\pm i\varepsilon,\quad \varepsilon>0,\quad k:\text{real} \text{ とおく.}$$

† この§は R^n 全体での話だから境界条件はもちろん考えていない.従って仮定は(I)のみでよいが L に関する仮定でも 対称性, strict hyperbolicity, A の ellipticity 及び L.4) は必要でない.これらは後の混合問題の取り扱いの為に仮定された.

$(A(\xi)-(k+i\varepsilon))^{-1}$ は $\varepsilon\downarrow 0$ のとき $\mathcal{S}'(\Xi^n)$ で

$$vp\,(A(\xi)-kI)^{-1}+\text{ measure concentrated on the normal surfaces}$$

なる形の distribution に収束する．従って distribution として

$$E(x,k+i0)=\mathcal{F}^{-1}\left[vp\,(A(\xi)-kI)^{-1}+\cdots\right]$$

は存在する．$E(x,k-i0)$ も同様である．しかし吾々はもっと正確に pointwise な意味での極限値の存在を示すことができる．

<u>定理 2.1</u>

$x\neq 0$，$k\neq 0$ に対し

$$E^{(\nu)}(x;k\pm i0)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu}E(x;k\pm i\varepsilon)$$

が存在し $(\mathbf{R}^n-\{0\})\times(\mathbf{R}^1-\{0\})$ で (x,k) の連続函数になる．

"<u>証明の概略</u>"

$$\lambda_j^{\pm}(\xi)=\pm a_j|\xi| \quad \text{として}$$

$$A(\xi)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^{+}(\xi)P_j^{+}(\xi)+\lambda_j^{-}(\xi)P_j^{-}(\xi)$$

と分解される．こゝで $P_j^{\pm}(\xi)$ は $\lambda_j^{\pm}(\xi)$ に対応する固有空間への projection であって次の形の行列で与えられる．

$$P_j^{\pm}(\xi)=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_j}(A(\xi)-\lambda I)^{-1}d\lambda=\left.\frac{{}^{T}\mathrm{Cof}\,(\lambda I-A(\xi))}{\frac{d}{d\lambda}\{\det(\lambda I-A(\xi))\}}\right|_{\lambda=\lambda_j^{\pm}(\xi)}.$$

このとき

$$(A(\xi)-\lambda I)^{-1}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\lambda_j^{+}(\xi)-\lambda}P_j^{+}(\xi)+\frac{1}{\lambda_j^{-}(\xi)-\lambda}P_j^{-}(\xi)$$

と表わされる．

実数 $k_0 \neq 0$ を任意に固定し λ は $\Lambda_\delta = \{\lambda ; |\mathrm{Re}\,\lambda - k_0| < \delta\}$ 内にあるとしよう. 今

$$\phi_0(r) = \begin{cases} 1 & |r| \leq 2\delta \\ 0 & |r| \geq 3\delta \end{cases}$$

$$\phi_j(r) = \begin{cases} 1 & \left|r - \frac{k_0}{a_j}\right| \leq \frac{2\delta}{a_j} \\ 0 & \left|r - \frac{k_0}{a_j}\right| \geq \frac{3\delta}{a_j} \end{cases} \qquad (j=1, \cdots, m)$$

なる函数で $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ に属するものをとる. こゝで δ は区間 $[-3\delta, 3\delta]$, $\left[\frac{k_0 - 3\delta}{a_j}, \frac{k_0 + 3\delta}{a_j}\right]$ $(j=1, \cdots, m)$ が disjoint となるように小さくとっておく. これらの函数を用い次の変形を行う.

<u>$k_0 > 0$ のとき</u>

$$\begin{aligned} E(x;\lambda) &\equiv \mathcal{F}^{-1}\left[(A(\xi) - \lambda I)^{-1}\right] \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left[\phi_0(|\xi|)(A(\xi) - \lambda I)^{-1}\right] \\ &+ \sum_{j=1}^{m} \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{(1-\phi_0(|\xi|))(1-\phi_j(|\xi|))}{a_j|\xi| - \lambda} P_j^+(\xi) + \frac{(1-\phi_0(|\xi|))}{-a_j|\xi| - \lambda} P_j^-(\xi)\right] \\ &+ \sum_{j=1}^{m} \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\phi_j(|\xi|)}{a_j|\xi| - \lambda} P_j^+(\xi)\right] \equiv E_1(x;\lambda) + E_2(x;\lambda) + E_3(x;\lambda) \end{aligned}$$

$k_0 < 0$ のときも対応する変形を行う.

さて上式の右辺第一項の [　　] の中は $\lambda \in \Lambda_\delta$ のとき ξ の C_0^∞ 函数で λ に解析的に依存している. 従って $E_1(x;\lambda)$ は x の C^∞ 函数でそれ自身および x に関する導函数は λ について解析的である. 又 $|x| \to \infty$ のとき $|x|^{-1}$ のどんな正数巾よりも速く減少する. しかも $\Lambda_{\delta,\varepsilon_0} = \{\lambda ; |\mathrm{Re}\,\lambda - k_0| < \delta, |\mathrm{Im}\,\lambda| < \varepsilon_0\}$ なる λ について一様である.

第二項の[　　]の中を $Q(\xi;\lambda)$ で表わせば $\lambda\in\Lambda_\delta$ のとき ξ の C^∞ 函数で $\xi=0$ のまわりで 0 でありしかも任意の multi-index ν に対し

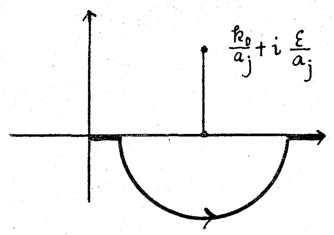
$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu Q(\xi;\lambda)\right| \leq C(1+|\xi|)^{-|\nu|-1}$$

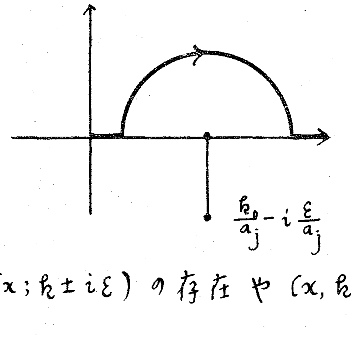
が成り立つ。λ が $\Lambda_{\delta,\varepsilon_0}$ を動くとき C は一定にとれる。従って $E_2(x;\lambda)=\mathfrak{F}^{-1}[Q(\xi;\lambda)]$ は $x\neq 0$ で C^∞ でそれ自身およびその導函数は λ について Continuous (実際には解析的)。又 $|x|\to\infty$ のとき $|x|^{-1}$ のどんな正数巾よりも速く減少する。しかも $\Lambda_{\delta,\varepsilon_0}$ に属する λ に関し一様である。

第三項 $E_3(x;\lambda)$ は積分の形で表わされるから極座標へ変換すると

$$E_3(x;\lambda)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sum_{j=1}^{m}\int_0^\infty \frac{r^{n-1}\phi_j(r)}{a_j r-(k\pm i\varepsilon)}\left\{\int_\Omega e^{i\langle x,\omega\rangle r}P_j^+(\omega)\,d\omega\right\}dr$$

となる。こゝで Ω は Ξ^n 内の単位球で $d\omega$ はその surface element を表わす。$\phi_j(r)$ が $r=\frac{k_0}{a_j}$ の近くで 1 であることに注意し integrand を r について $\frac{k_0}{a_j}$ のまわりで Complex に拡張し積分路を $k\pm i\varepsilon$ に応じそれぞれ下図の如く変形する。





このとき $E_3^{(\nu)}(x;k\pm i0)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu E_3(x;k\pm i\varepsilon)$ の存在や (x,k) についての連続性は明らか。

さて次に $E^{(\nu)}(x;k\pm i\varepsilon)$ の $|x|\to\infty$ での漸近的挙動を考察する。即ち $|x|\to\infty$ のときの x についての減少の order の $\lambda=k\pm i\varepsilon$ ($|k-k_0|<\delta$, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$) に関する一様評価を問題にしよう。既に注意したことからもわかるように問題となるのは $E_3(x;k\pm i\varepsilon)$ のみであるがこの $|x|\to\infty$ のときの減少の order を正確に出す為に次の2つの lemma を用意する。

まず単位球面 Ω 上に concentrate された measure の Fourier 像の無限遠での挙動に関するものである。†

<u>Lemma 2.1</u>

$$I(x)\equiv\int_\Omega e^{i\langle x,\omega\rangle}\mu(\omega)\,d\omega$$

とおく。こゝで $\mu(\omega)$ は Ω 上で C^∞ な函数とする。そのとき $x=|x|\cdot\theta$ とおくと次の <u>asymptotic formula</u> が成り立つ。

$$I(x)=\mu(\theta)\left(\frac{2\pi}{|x|}\right)^{\frac{n-1}{2}}e^{i(|x|-\frac{\pi}{4}(n-1))}+\mu(-\theta)\left(\frac{2\pi}{|x|}\right)^{\frac{n-1}{2}}e^{-i(|x|-\frac{\pi}{4}(n-1))}$$

$$+\,q(x)$$

$$|q(x)|+\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial q}{\partial x_j}(x)\right|\leq\frac{\mathrm{Const}}{|x|^{\frac{n+1}{2}}}\quad,\quad |x|\to\infty$$

<u>"証明の方針"</u>

$x=(0\cdots 0\,x_n)$ の場合に示せばよい。実際一般の場合は

† isotropic でない場合 Ω の代りに normal surfaces をとらねばならないがそのときにも仮定(I) L.3)より全く同一の証明方針で類似の formula が得られる。

座標軸の廻転を用いることによりこの場合に帰着されるからである. 吾々はまず

$$I(x_n) \equiv I(0 \cdots 0\, x_n) = \int_\Omega e^{i x_n \omega_n} \mu(\omega)\, d\omega$$

の $|x_n| \to \infty$ のときの挙動に関する principal contribution は法線が $(0 \cdots 0\, x_n)$ と平行であるような球面上の点即ち北極 $(0 \cdots 0\, 1)$ と南極 $(0 \cdots 0\, -1)$ のまわりでの積分によるものであることを示そう.

球面 Ω を C^∞ manifold と考へ十分小な座標近傍 $\{U_j\}_{1 \leq j \leq l}$ で Ω をおおう. $\{U_j\}$ に従属する球面上の C^∞ な単位の分解

$$1 = \sum_1^l \rho_j(\omega) \quad , \quad \operatorname{supp} \rho_j \subset U_j$$

をとり

$$I(x_n) = \sum_1^l \int_\Omega e^{i x_n \omega_n} \mu_j(\omega)\, d\omega \quad , \quad \mu_j(\omega) = \mu(\omega)\, \rho_j(\omega)$$

と分解する. そのとき北極や南極を含まない U_j に対しては U_j を座標近傍とする任意の局所座標 $\sigma = (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})$:

$$\omega_k = \omega_k(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}) \qquad (k = 1, \cdots, n)$$

をとると U_j の各点における法線は $(0 \cdots 0\, x_n)$ と平行にはならないから接ベクトル $\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial \sigma_i} \cdots \frac{\partial \omega_n}{\partial \sigma_i}\right)$ は $(0 \cdots 0\, x_n)$ と直交しない. 即ち

$$x_n \cdot \frac{\partial \omega_n}{\partial \sigma_i}(\sigma) \neq 0$$

が成り立つ. そこで

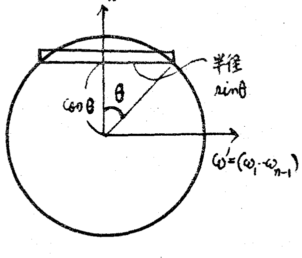
$$\int e^{i x_n \omega_n} \mu_j(\omega)\, d\omega = \int e^{i x_n \cdot \omega_n(\sigma)} \mu(\omega(\sigma))\, \frac{D(\omega)}{D(\sigma)}\, d\sigma$$

と表わし σ について部分積分を何回もくり返すと $|x_n| \to \infty$ のとき

この積分は $|x_n|^{-1}$ の任意正数巾よりも速く減少することがわかる. 従って μ_j の support が北極或いは南極を含む U_j 内に含まれる場合のみが問題となる. 北極や南極のまわりではそれぞれ $\omega_n=\sqrt{1-\omega_1^2-\cdots-\omega_{n-1}^2}$, $-\sqrt{1-\omega_1^2-\cdots-\omega_{n-1}^2}$ と表わされるが $\omega_1=\cdots=\omega_{n-1}=0$ はこれらの函数のいわゆる regular critical point である. そこで M. Morse の lemma を適用すると, 適当な座標 $\sigma=(\sigma_1\cdots\sigma_{n-1})$ をとり $\omega_n=\pm(1-\sigma_1^2-\cdots-\sigma_{n-1}^2)$ と表わすことができる. そして Jacobien は $\frac{D\omega}{D\sigma}=2^{\frac{n-1}{2}}$ (一般の場合は (Gaussの曲率)$^{-\frac{1}{2}}$ がかゝる) となる. この $\sigma_1\cdots\sigma_{n-1}$ を用い積分を書き直せば漸近展開に関する stationary phase の方法を用いることができる. lemma に述べられた形を導くにはやゝ煩雑な計算を必要とするのでこゝでは省略する. たゞ principal term は

$$2^{\frac{n-1}{2}}\mu(0,\cdots,0,\pm 1)\prod_{j=1}^{n-1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\pm i x_n \sigma_j^2}d\sigma_j$$

なる項より変数変換で Fresnel 積分に帰着することによりもたらされることのみを注意しておく.



注意.

$\mu(\omega)\equiv 1$ のとき $d\omega=\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}(\sin\theta)^{n-2}d\theta$

となるから

$\mathrm{Re}(\nu+\frac{1}{2})>0$ のときの Bessel 函数の積分表示.

$$J_\nu(x)=\frac{(\frac{x}{2})^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^\pi \sin^{2\nu}\theta\; e^{-ix\cos\theta}d\theta$$

と漸近公式

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - (2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right), \quad x \to \infty$$

より

$$I(x_n) = \int_{\Omega} e^{i x_n \omega_n} d\omega = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{x_n}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}} J_{\frac{n-2}{2}}(x_n)$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\left(\frac{x_n}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}} \cos\left(x_n - (n-1)\frac{\pi}{4}\right) + O\left(x_n^{-\frac{n+1}{2}}\right)$$

となり上の結果と一致する.

<u>Lemma 2.2</u>

k_0 を real $\neq 0$ とし δ は区間 $[k_0 - 3\delta, k_0 + 3\delta]$ が 0 を含まないような正数とする. $\rho \in C_0^{\infty}((k_0 - 3\delta, k_0 + 3\delta))$, $I(x)$ を Lemma 2.1 における函数とするとき

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(r)}{r - (k \pm i\varepsilon)} I(rx)\, dr \right| \leq C |x|^{-\frac{n-1}{2}} \quad \text{for} \quad \begin{array}{l} |x| \geq {}^{\exists}R \\ |k - k_0| < \delta \\ \varepsilon \geq 0 \end{array}$$

が成り立つ. こゝで定数 C は ρ や μ には関係するが ε や上の範囲の k, x には関係しない。

"<u>証明の方針</u>"

Lemma 2.1 を適用し $(r - (k \pm i\varepsilon))^{-1}$ の Fourier transform

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{isr}}{r - (k \pm i\varepsilon)} dr = \pm 2\pi i\, Y(\pm s)\, e^{i(k \pm i\varepsilon)s}, \quad \varepsilon \geq 0$$

$Y(s)$ は Heaviside 函数

と

$$\left| \int_{-3\delta}^{3\delta} \frac{dr}{r \pm i\varepsilon} \right|, \quad \int_{-3\delta}^{3\delta} \left| \frac{r}{r \pm i\varepsilon} \right| dr \leq \text{Const. for all } \varepsilon > 0$$

なることを用いればよい。

これらのLemmasを用いることにより次の定理が従う。

定理 2.2

k_0を0でない実数とし δ, ε_0を適当にきめられた正数としよう。このとき任意のmulti-index νに対し適当に定数 $C, R>0$をとれば

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu} E(x; k\pm i\varepsilon)\right| \leqslant C|x|^{-\frac{n-1}{2}} \quad \text{for } |x|\geqslant R,\ |k-k_0|<\delta,\ 0\leqslant\varepsilon<\varepsilon_0$$

が成り立つ。

吾々が後で用いるのは次の事実である。

系

$y\in \mathbb{R}^n_+$, $\forall\nu$: multi index, $\forall q>2$に対し

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu} E(x-y; k\pm i\varepsilon)\Big|_{x_n=0} \in L^q(\mathbb{R}^{n-1}_{x'})$$

である($\varepsilon\geqslant 0$)。しかも写像

$$(y, k, \varepsilon) \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu} E(x-y; k\pm i\varepsilon)\Big|_{x_n=0} \in L^q(\mathbb{R}^{n-1}_{x'})$$

は連続である。

§3. Poisson kernelの構成

§3及び§4の結果は仮定(I), L.1), L.3), L.4)および仮定(II) B.3)の下で成り立つ。すなわちAのellipticity, 境界条件に関するminimal conservativeな性質およびcoercivenessは必要でない。

§1 において述べた hyperbolic system L に対する混合問題に associate される stationary problem BP ち operator $A-\lambda$ に対する次の境界値問題

$$\begin{cases} (A-\lambda I)\, v(x;\lambda) = g(x) & \text{in } \mathbf{R}^n_+ \quad (\lambda \neq \text{real}) \\ B\, v(x;\lambda)\Big|_{x_n=0} = 0 \end{cases}$$

を考える．この問題の Poisson kernel は

$$(A-\lambda I)\, K(x;\lambda) = 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^n_+$$

$$B\,K(x;\lambda)\Big|_{x_n=0} = \delta(x')I$$

を満足する $(2m)\times m$ temperated matrix distribution $K(x;\lambda)$ である．B は $m\times(2m)$ 定数行列であったから こゝでの I は m次単位行列を表わす．

$K(x;\lambda)$ を構成する為 発見的考察として上の式を $x'=(x_1\cdots x_{n-1})$ について形式的に Fourier 変換する．K の Fourier 像を $\tilde{K}$ で表わせば $\tilde{K}(\xi',x_n;\lambda)$ は (ξ',λ) を parameters とする常微分方程式

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dx_n}\tilde{K}(\xi',x_n;\lambda) = M(\xi';\lambda)\,\tilde{K}(\xi',x_n;\lambda) \quad , \quad x_n>0$$

の解で

$$B\tilde{K}(\xi',0;\lambda) = (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} I$$

を満足し，しかも $x_n\to\infty$ のとき x_n については高々 x_n の巾数巾の order でしか増大しない．吾々はこれらを考慮に入れ (ξ',λ) を parameters とする常微分方程式系

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dx_n}U(\xi',x_n;\lambda) = M(\xi';\lambda)\,U(\xi',x_n;\lambda) \quad , \quad x_n>0$$

の附帯条件

$$U(\xi', x_n ; \lambda) = O(x_n^{\rho}) \quad , x_n \to \infty \quad \left(\begin{array}{l}\rho \text{ は一応 } \xi', \lambda \text{ に depend} \\ \text{するとしてよい}\end{array}\right)$$

$$BU(\xi', 0 ; \lambda) = g \in \mathbb{C}^m$$

の下での解に関する考察から始める。

吾々は今 isotropic case を考えているから行列 $M(\xi';\lambda) = A_n^{-1}(\lambda I - \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j A_j)$ の固有値は explicit に

$$\tau_j(\xi';\lambda) = \left\{ \left(\frac{\lambda}{a_j}\right)^2 - |\xi'|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (j=1, \cdots, m)$$

で与えられる。$\mathrm{Im}\,\tau_j > 0$ なる固有値を $\tau_j^+(\xi';\lambda)$ で表わそう。吾々は後で $U(\xi', x_n ; k \pm i\varepsilon)$ の $\varepsilon \downarrow 0$ なる limit を考える必要がある為次のことに注意する。

$\tau_j^+(\xi';\lambda)$ は $\tau_j^+(\xi'; k+i0)$ (resp. $\tau_j^+(\xi'; k-i0)$) を $\lambda = k$ における値と考えることにより上半平面 $\{\lambda ; \mathrm{Im}\,\lambda \geq 0\}$ (resp. 下半平面 $\{\lambda ; \mathrm{Im}\,\lambda \leq 0\}$) で (ξ', λ) の連続函数となる。しかも $\forall p$ $(1 \leq p < 2)$ に対し

$$\tau_j^+(\cdot\, ; k \pm i\varepsilon), \ \frac{\partial \tau_j^+}{\partial \xi_i}(\cdot\, ; k \pm i\varepsilon)$$

$$(\star) \qquad \in L^p\left(\left\{\xi' ; |\xi'| \leq \frac{k_0 + 2\delta}{a_m}\right\}\right) \quad \text{for } |k - k_0| < \delta,\ \varepsilon \geq 0 \quad ^{\dagger}$$

が成り立つ。

次の吾々の仕事は $\tau_j^+(\xi';\lambda)$ に対応する eigenvector $h_j^+(\xi';\lambda)$ を $h_j^+(\xi'; k \pm i0)$ が nontrivial vector として存在ししかも上の性質 $(\star)$ をもつように構成することである。

行列 $M(\xi';\lambda)$ は λ が real $\neq 0$ となるときある ξ' に対しては

† isotropic な場合は explicit な形からわかるが一般の場合は仮定 (I), L.4) より Puiseux 展開の議論を用いてこの性質が示される。

double real eigenvalues をもつからそこで eigenvector $h_j^+(\xi';\lambda)$ が trivial vector になったり或いは regularity（一般には連続性も）が失われる危険性がある．しかし吾々の場合（一般のときは仮定(I) L.1), L.4) より）求むるものが次のようにして構成できる．

まず行列 $\left(\lambda I - \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j A_j - \tau A_n\right)\Big|_{\tau=\tau_j^+(\xi';\lambda)}$ の各列 vector は $M(\xi';\lambda)$ の固有値 $\tau_j^+(\xi';\lambda)$ に対応する固有 vector であることに注意する．
λ = real のとき strict hyperbolicity よりそれらの列 vector の中に (ξ',λ) について local には zero vector にならないものが存在する．これと列 vector の $(\xi';\lambda)$ に関する homogeneity とを使い有限個の $C^\infty_{\xi'}$ 函数からなる Ξ^{n-1} 空間の単位の分解を用いて $h_j^+(\xi';\lambda)$ を構成することができる．

吾々は再び $\lambda \neq$ real の場合に帰ろう．$\lambda \neq$ real のとき $M(\xi';\lambda)$ の固有値はすべて相異なるから このようにして作られた $h_1^+(\xi';\lambda)$, $\cdots$, $h_m^+(\xi';\lambda)$ は行列 $M(\xi';\lambda)$ の positive eigenspace $E^+(\xi';\lambda)$ の一つの基底をつくる．
さて常微分方程式系 $\frac{1}{i}\frac{d}{dx_n}U(\xi',x_n;\lambda) = M(\xi';\lambda)U(\xi',x_n;\lambda)$ の x_n について temperated な†解 $U(\xi',x_n;\lambda)$（ξ',λ は任意に固定して考える）は

$$U(\xi',x_n;\lambda) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(\xi';\lambda)\, e^{i\tau_j^+(\xi';\lambda)x_n}\, h_j^+(\xi';\lambda)$$

と一意的に表わされる．従って上の方程式の解 $U(\xi',x_n;\lambda)$ が x_n について temperated であることと $U(\xi',0;\lambda) \in E^+(\xi';\lambda)$ とは同値

† $x_n \geqq 0$ で考える．

である．このことに注意すれば次の補題が成り立つ

Lemma 3.1

1° $\forall g \in \mathbf{C}^m$ に対し

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dx_n}U(\xi', x_n; \lambda) = M(\xi'; \lambda)U(\xi', x_n; \lambda) \quad , \quad x_n > 0$$

$$BU(\xi', 0; \lambda) = g$$

の temperated solution が一意的に存在する．

2° linear operator B は $E^+(\xi'; \lambda)$ を $\mathbf{C}^m$ の上への1対1写像である．

3° $\mathcal{B}\ (= \ker B) \cap E^+(\xi'; \lambda) = \{0\}$.

4° Lopatinski determinant は0にならない．即ち

$$\det(\langle b_\mu, h_\nu^+(\xi'; \lambda)\rangle) \neq 0 .$$

さて行列 $(\langle b_\mu, h_\nu^+(\xi'; \lambda)\rangle)$ の第 j 列を $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}(k$ で置きかえて得られる行列を $\mathcal{H}_{kj}(\xi'; \lambda)$ で表わし

$$U_k(\xi', x_n; \lambda) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=1}^{m} \frac{\mathcal{H}_{kj}(\xi'; \lambda)}{\det(\langle b_\mu, h_\nu^+(\xi'; \lambda)\rangle)} e^{i\tau_j^+(\xi'; \lambda)x_n} h_j^+(\xi'; \lambda)$$

$$(k = 1, \cdots, m)$$

とおく．そして長さ $2m$ の列 vector U_k を第 k 列とする $(2m)\times m$ 行列 $(U_1(\xi', x_n; \lambda), \cdots, U_m(\xi', x_n; \lambda))$

を考え $K(x', x_n; \lambda)$ をこゝで新しく

$$K(x', x_n; \lambda) = \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}[(U_1(\xi', x_n; \lambda), \cdots, U_m(\xi', x_n; \lambda))]$$

で定義する．このとき $K(x', x_n; \lambda)$ は Poisson kernel である．
実際次の定理が成立する．

定理 3.1

$g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1}_{x'})$ に対し函数 $v(x;\lambda) = K(x;\lambda) \underset{(x')}{*} g(x')$ は境界値問題

$$(A - \lambda I)\, v(x;\lambda) = 0 \quad , x \in \mathbb{R}^n_+ \quad (\lambda \neq \text{real})$$
$$B\, v(x;\lambda)\Big|_{x_n=0} = g(x')$$

の $L^2(\mathbb{R}^n_+)$ における一意的な解を与える.

さて吾々は $\lambda \neq$ real と考えてきたが $U_k(\xi', x_n; \lambda)$ を与える formula と仮定 (II) B.3) より $K(x', x_n; k \pm i0)$ が distribution として存在することがわかる. もっと正確に

$$[0,\infty) \ni x_n \longmapsto K(\cdot, x_n; k \pm i0) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n-1}_{x'})$$

は連続で $x_n > 0$ で x_n について C^∞ である.

§4. Green 函数の構成と $\lambda \to$ real のときの性質

system $\{A - \lambda I, B\}$ の Green 函数 $G(x,y;\lambda)$ は §2 で定義された自由空間での基本解 $E(x;\lambda)$ を用い

$$G(x,y;\lambda) = E(x-y;\lambda) - E_c(x,y;\lambda)$$

なる形で求められる. こゝで $E_c(x,y;\lambda)$ は compensating kernel と呼ばれるもので非斉次な境界条件をもつ境界値問題

$$\begin{cases} (A - \lambda I)\, E_c(x,y;\lambda) = 0 \\ \qquad B E_c(x,y;\lambda)\Big|_{x_n=0} = B E(x-y;\lambda)\Big|_{x_n=0} \end{cases}$$

の解として得られる. 従って $E_c(x,y;\lambda)$ は §3 で構成した Poisson kernel を用い形式的には

$$E_c(x,y;\lambda) = K(x;\lambda) \underset{(x')}{*} \left(BE(x-y;\lambda)\Big|_{x_n=0} \right) \dagger$$

なる形で与えられる.

この § の目的は $\lambda = k \pm i\varepsilon$ が $\varepsilon \downarrow 0$ のときも含めて上の合成積が意味をもち そして $E_c(x,y;k\pm i0)$ が $x \neq y$, $k \neq 0$ で (x,y,k) について連続であることを示すことにある.

k_0 を 0 でない実数とし λ は $\overline{\Lambda^+} = \{ k+i\varepsilon\ ;\ |k-k_0| \leq \delta,\ 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \}$ を動くとしよう ($\lambda \in \overline{\Lambda^-} = \{ k-i\varepsilon\ ;\ |k-k_0| \leq \delta,\ 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \}$ の場合も同様にとり扱うことができる). y を $\mathbb{R}^n_+$ の任意の点とし固定する. 行列 $K(x;\lambda)$ の任意の要素を $\Phi(x;\lambda)$ で $BE(x-y;\lambda)\Big|_{x_n=0}$ の任意の要素を $\Psi(x';\lambda) \equiv \Psi(x',y;\lambda)$ で表わすことにする.

まず Φ をその x' についての Fourier 像が $\lambda = k+i0$ のとき ξ' の函数として singularity をもつ部分と C^∞ ではあるが $|\xi'| \to \infty$ のときあまり速くは減少しない部分とにわける. 即ち

$$l > \frac{|k_0| + 2\delta}{a_m} \qquad (a_m \text{ は最小の伝播速度})$$

なる正数 l をとり函数 $e \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1}_{\xi'})$ で

$$e(\xi') = \begin{cases} 1 & |\xi'| \leq l \\ 0 & |\xi'| \geq l+1 \end{cases}$$

$\dagger$ $G(x,y;\lambda)$, $E(x;\lambda)$, $E_c(x,y;\lambda)$ は $(2m)\times(2m)$ 行列, $K(x;\lambda)$ は $(2m)\times m$ 行列 B は $m\times(2m)$ 行列, $BE(x-y;\lambda)$ は $m\times(2m)$ 行列である.

なるものを選び固定する．そしてΦを

$$\Phi(x;\lambda)=\Phi_1(x;\lambda)+\Phi_2(x;\lambda)$$

$$\tilde{\Phi}_1(\xi',x_n;\lambda)=e(\xi')\,\tilde{\Phi}(\xi',x_n;\lambda)$$

$$\tilde{\Phi}_2(\xi',x_n;\lambda)=(1-e(\xi'))\,\tilde{\Phi}(\xi',x_n;\lambda)$$

と分解する．そのとき仮定 B.3) より

$$\tilde{\Phi}_2\in\mathcal{O}_M(\Xi^{n-1}_{\xi'})\quad\left(\begin{array}{l}\text{temperated } C^\infty\text{-function}\\ \text{の空間}\end{array}\right)$$

が従う．よって $\Phi_2\in\mathcal{O}_C'(\mathbb{R}^{n-1}_{x'})$ （急減少超函数の空間）となる．

一方 $\Psi\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n-1}_{x'})$ より convolution $\Phi_2\underset{(x')}{*}\Psi$ は意味をもつ．そして

$$\Phi_2\underset{(x')}{*}\Psi=(1-\Delta')^{-N}\Phi_2(x',x_n;\lambda)*(1-\Delta')^{N}\Psi(x';\lambda)$$

が成り立つ．こゝで $\Delta'=\sum_1^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ である．

$p\geqq 1$ に対し N を十分大きくとると

$$(1-\Delta')^{-N}\Phi_2(\cdot,x_n;\lambda)\in L^p(\mathbb{R}^{n-1}_{x'})$$

となる．一方定理 2.2 の系より $\forall q>2$ に対し

$$(1-\Delta')^{N}\Psi(\cdot;\lambda)\in L^q(\mathbb{R}^{n-1}_{x'})$$

が成り立つ．このとき

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1=\frac{1}{r}\quad となる\ r\geqq 1$$

がとれ合成積 $\Phi_2\underset{(x')}{*}\Psi$ は $\lambda=k+i\varepsilon\in\overline{\Lambda}_+$ のとき $L^r(\mathbb{R}^{n-1}_{x'})$ に属し $(x_n,\lambda)\leadsto\Phi_2\underset{(x')}{*}\Psi\in L^r(\mathbb{R}^{n-1}_{x'})$ は連続となる．

$\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{\alpha'}\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}\Phi_2\underset{(x')}{*}\Psi$ についても同様である．

次に $\Phi_1\underset{(x')}{*}\Psi$ を考えよう．

$\forall q>2$ に対し $\Psi(\cdot;\lambda)\in L^q(\mathbb{R}^{n-1}_{x'})$ が成り立つことより適当な

$p\ (1 \leqslant p < 2)$ に対し $\Phi_1(\cdot, x_n; \lambda) \in L^p(\mathbb{R}^{n-1}_{x'})$ が云えれば,

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{r}$ となる $r \geqslant 1$ がとれ $\Phi_1 \underset{(x')}{*} \Psi \in L^r(\mathbb{R}^{n-1}_{x'})$ が云える.

そこでそのような p の存在を示そう.

簡単の為 $\Phi_1(x', x_n; \lambda)$ を $\Phi_1(x'; \lambda)$ と書く.

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\Phi_1(x';\lambda)|^p dx' = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|x'|)^{-p} \,|\,(1+|x'|)\Phi_1(x';\lambda)|^p dx'$$

Hölderの不等式により

$$\leqslant \left\{ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|x'|)^{-ap} dx' \right\}^{\frac{1}{a}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |(1+|x'|)\Phi_1(x';\lambda)|^{bp} dx' \right\}^{\frac{1}{b}}$$

となる. こゝで $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ で $a, b \geqslant 1$ である.

まず前の $\{\quad\}$ の積分が存在する為には

$$ap > n-1$$

が成立せねばならない. 一方

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |(1+|x'|)\Phi_1(x';\lambda)|^{bp} dx' \right\}^{bp}$$

$$\leqslant \|\Phi_1(\cdot;\lambda)\|_{L^{bp}(\mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{j=1}^{n-1} \|x_j \Phi_1(\cdot;\lambda)\|_{L^{bp}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

であるが $s = \frac{bp}{bp-1}$ とおくとき $1 < s < 2$ であれば

$bp > 2$ となり 従って L^p の Fourier 変換に関する

Titchmarch and M. Riesz の定理により

$$\|\Phi_1(x';\lambda)\|_{L^{bp}} \leqslant \|\hat{\Phi}_1(\xi';\lambda)\|_{L^s}$$

$$\|x_j \Phi_1(x';\lambda)\|_{L^{bp}} \leqslant \left\|\frac{\partial}{\partial \xi_j} \hat{\Phi}_1(\xi';\lambda)\right\|_{L^s} \qquad (j=1, \cdots, n-1)$$

が成り立つ. ところがこれらの式の右辺が有限なことが§2における $\tau_j^{\pm}(\xi';k\pm i\varepsilon)$ や $h_j^{\pm}(\xi';k\pm i\varepsilon)$ が性質(☆)をみたしていることと $U_k(\xi',x_n;\lambda)$ を与える formula 及び仮定 B.3) から従う. このようにして

$$1\leq p<2\ ,\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1\ ,\quad a,b\geq 1$$

$$ap>n-1 \qquad bp>2 \quad \left(\text{or } 1<\frac{bp}{bp-1}<2\right)$$

を満足する a,b,p の存在が示されればよいがこれは容易である. 同様にして $\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{\alpha'}\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}\Phi_1(\cdot,x_n;\lambda)\in L^p(\mathbb{R}^{n-1}_{x'})$ となる p $(1\leq p<2)$ の存在も示され

$$(x_n,y,\lambda)\ \rightsquigarrow\ \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{\alpha'}\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}\Phi_1(\cdot,x_n;\lambda)\underset{(x')}{*}\Psi(\cdot,y;\lambda)\in L^r(\mathbb{R}^{n-1}_{x'})$$

の連続性も云える.

これらのことより $g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1}_+)$ に対し

$$\int_{\mathbb{R}^n_+}E_c(x,y;k\pm i0)\,g(y)\,dy$$

は x について C^∞ でその x についての任意の derivative が $\mathbb{R}^n_+\times(\mathbb{R}^1-\{0\})$ において (x,k) の連続函数となることが従う. 定理 2.1 と結合すれば次の定理を得る.

<u>定理 4.1</u>　$g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ とする. そのとき任意の multi-index ν に対し

$$G^{(\nu)}_{k\pm i0}\,g(x)\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu}\int_{\mathbb{R}^n_+}G(x,y;k\pm i0)\,g(y)\,dy$$

は $\mathbb{R}^n_+\times(\mathbb{R}^1-\{0\})$ において (x,k) の連続函数である.

§5. 主要定理の証明

吾々は§1で述べた主要定理を得る為，問題を L^2 空間の枠内で取り扱う．

微分作用素 $A = \frac{1}{i}\sum_{1}^{n} A_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ を $L^2(\mathbb{R}^n_+)$ † における定義域

$$D(\mathcal{A}) = \{ v(x) ;\ v \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+}),\ Bv(x',0) = 0 \}$$

をもつ linear operator とみるとき $\mathcal{A}$ は pre-closed であり，従って closed extension をもつ．これを $\mathbb{H}$ で表わそう．

Lemma 5.1

$\mathbb{H}$ は a self-adjoint operator in $L^2(\mathbb{R}^n_+)$ であり

$$D(\mathbb{H}) = \{ v(x) ;\ v \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\mathbb{R}^n_+),\ Bv(x',0) = 0 \}^{††}$$

である．

"証明の方針" 行列 A_j $(j=1,\cdots,m)$ が Hermitian なことと境界条件 B が conservative であることから $\mathbb{H} \subset \mathbb{H}^*$ が従う．††† また minimality より dual boundary space $(A_n \mathcal{B})^\perp$ が $\mathcal{B}$ と一致することが云え $\mathbb{H} = \mathbb{H}^*$ となる．定義域 $D(\mathbb{H})$ が上のようになることは作用素 A の ellipticity と境界条件の coerciveness から従う．

† 正確には $L^2(\mathbb{R}^n_+)$ の $2m$ ケの直積 Hilbert space であるが簡単の為このように記する．

†† $\mathcal{E}^1_{L^2}(\mathbb{R}^n_+) = H^1(\mathbb{R}^n_+) = W^{1,2}(\mathbb{R}^n_+) =$ v 及び distribution derivatives $\frac{\partial v}{\partial x_j}$ $(j=1,\cdots,n)$ が $L^2(\mathbb{R}^n_+)$ に属する v の全体

††† これは Lax and Phillips [9] (1960) による　即ち彼等は一階対称系の boundary value problem に対し weak extension と strong extension の一致を証明した．Lax and Phillips [10] も参照のこと．

さてこの operator $\mathbf{H}$ を用いると吾々の混合問題は

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = i\mathbf{H}\, u(t) \\ u(0) = g \end{cases}$$

と発展方程式の形に reformulate される．そのとき $\mathbf{H}$ が spectral representation

$$\mathbf{H} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu \, d\mathbf{E}_\mu \quad , \quad \{\mathbf{E}_\mu\}_{-\infty<\mu<\infty}$$ は $\mathbf{H}$ に対応する the resolution of the identity

をもつことより解 $u(t) = u(t,x)$ は

$$u(t,\cdot) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\mu} \, d\mathbf{E}_\mu g$$

で与えられる．

まず吾々は spectral family $\{\mathbf{E}_\mu\}$ とさきに構成した Green 函数との関係を確立しよう．

<u>定理 5.1</u>　$g \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n)$ とする．そのとき

1°　$(\mathbf{E}_\mu g)(x)$ は x について C^∞ であり又 $\mathbf{R}_+^n \times \mathbf{R}^1$ で (x,μ) の連続函数である．

2°　$(\mathbf{E}_\mu g)(x)$ は x を任意に固定するとき $\mathbf{R}^1 - \{0\}$ で μ について一回連続的可微分であって

$$\frac{d}{d\mu}(\mathbf{E}_\mu g)(x) = \frac{1}{2\pi i}\left\{ G_{\mu+i0} \cdot g(x) - G_{\mu-i0} \cdot g(x) \right\} \quad , \quad \mu \neq 0$$

が成り立つ．但し

$$G_\lambda \cdot g(x) = \int_{\mathbf{R}_+^n} G(x,y;\lambda)\, g(y)\, dy$$

である．

"証明の方針"

$\mathbf{E}_\mu g$ が x の C^∞ 函数であることは $\mathbf{H}$ が coercive boundary value problem に associate される自己共役作用素であることと Sobolev の lemma から従う。

2° は
$$\mathbf{R}_\lambda = (\mathbf{H} - \lambda \mathbf{I})^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mu - \lambda}\, d\mathbf{E}_\mu \quad , \quad \lambda \neq \text{real}$$
$$\left((\mathbf{H} - \lambda \mathbf{I})^{-1} g\right)(x) = \int_{\mathbf{R}^n_+} G(x, y; \lambda)\, g(y)\, dy$$

なる relation と Stieltjes の反転公式と定理 4.1 から従う。

念の為 Stieltjes の反転公式をかいておく。

$\phi(\mu)$ を $[-\infty, \infty]$ で有界変動な函数とし $z \neq$ real に対し Cauchy kernel をもつ Cauchy - Stieltjes 積分
$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mu - z}\, d\phi(\mu)$$
を考える。そのとき
$$\frac{\phi(\mu+0) + \phi(\mu-0)}{2} - \frac{\phi(\nu+0) + \phi(\nu-0)}{2}$$
$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_\nu^\mu \left\{ \Phi(\sigma + i\varepsilon) - \Phi(\sigma - i\varepsilon) \right\} d\sigma$$
が成り立つ。

1° の $(\mathbf{E}_\mu g)(x)$ が $\mu = 0$ で連続なことは boundary condition の coerciveness から $\mu = 0$ が $\mathbf{H}$ の eigenvalue でないことが示されるからである。

主要定理の証明　$g \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n)$ に対する混合問題の解は

$u(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\mu} d\mathbf{E}_\mu g(x)$ で与えられた．そこで右辺の積分を

$$= \int_N^\infty + \int_\delta^N + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{-N}^{-\delta} + \int_{-\infty}^{-N} = u_1(t,x) + u_2(t,x) + u_3(t,x) + u_4(t,x) + u_5(t,x)$$

とわける．そのとき Sobolev の lemma と Coercive ineaquality より

$$|u_1(t,x)| \leq Const \| u_1(t,\cdot)\|_{\mathcal{E}^{[\frac{n}{2}]+1}_{L^2}(\mathbf{R}_+^n)} \leq Const \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]+1} \| \mathbf{H}^k u_1(t,\cdot)\|$$

しかるに

$g \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D(\mathbf{H}^k)$ より $\| \mathbf{H}^k u_1(t,\cdot)\|^2 = \int_N^\infty \mu^{2k} d\|\mathbf{E}_\mu g\|^2 < \infty$

が成り立つから $\forall \varepsilon > 0$ に対し N を十分大きくとると $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbf{R}_+^n$ の如何に拘らず $|u_1(t,x)| < \varepsilon$ が成り立つ．同様に $|u_5(t,x)| < \varepsilon$ となる．

また同じようにして

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} e^{it\mu} d\mathbf{E}_\mu g(x) \right|^2 \leq Const\,(1+\delta^2+\cdots+\delta^{2[\frac{n}{2}]+2}) \cdot (\|\mathbf{E}_\delta g\|^2 - \|\mathbf{E}_{-\delta} g\|^2)$$

が成り立ち $\|\mathbf{E}_\mu g\|$ の $\mu = 0$ における連続性より δ を十分小にとれば $|u_3(t,x)| < \varepsilon$ となる．一方定理 5.1 より $\Theta(\mu,x) = G_{\mu+i0}\, g(x) - G_{\mu-i0}\, g(x)$ とおくと

$$u_2(t,x) = \int_\delta^N e^{it\mu} d\mathbf{E}_\mu g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\delta^N e^{it\mu}\, \Theta(\mu,x)\, d\mu$$

と表わされる．従って x を固定すれば Riemann-Lebesgue の定理より $t \to \infty$ のとき $u_2(t,x) \to 0$ となる．x が $\mathbf{R}_+^n$ の任意の Compact set K を動くとき上の収束の一様性は $x \in K$ を parameter とする変数 μ の連続函数の族 $\{\Theta(\cdot,x)\}_{x\in K}$ が連続函数の空間 $C[\delta, N]$ で precompact set をつくることから云える．$u_4(t,x)$ に対しても同様である．かくして主要定理は証明された．

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, Comm. Pure Appl. Math., 12 (1959), 623-727.

[2] S. AGMON, Problèmes mixtes pour les équations hyperboliques d'ordre supérieur, Colloques sur les équations aux dérivées partielles, C.N.R.S. (1962), 13-18.

[3] T. CARLEMAN, Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique, Uppsala, 1923.

[4] A. ERDELYI, Asymptotic expansions, Dover Publ. Co., New York, 1956.

[5] K. O. FRIEDRICHS, Symmetric positive linear differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 11 (1958), 333-418.

[6] F. R. GANTMACHER, Théorie des matrices I, Dunod, Paris, 1966.

[7] V. V. GRUŠIN, On Sommerfeld-type conditions for a certain class of partial differential equations, A. M. S. Transl. series 2, 51 (1966), 82-112 (Mat. Sb. (N.S.) 61 (103) (1963), 147-174).

[8] R. HERSH, Mixed problems in several variables, J. Math. Mech., 12 (1963), 317-334.

[9] P. D. LAX and R. S. PHILLIPS,Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators, Comm. Pure Appl. Math., 13 (1960), 427-455.

[10] P. D. LAX and R. S. PHILLIPS, Scattering theory, Academic press, New York and London, 1967.

[11] P. D. LAX, C. S. MORAWETZ and R. S. PHILLIPS, The exponential decay of solutions of the wave equation in the

exterior of a star-shaped obstacle, Bull. Amer. Math. Soc., 68 (1962), 593-595.

[12] W. LITTMAN, Fourier transforms of surface-carried measures and differentiability of surface averages, Bull. Amer. Math., Soc. 69 (1963), 766-770.

[13] D. A. LUDWIG, Examples of the behavior of solutions of hyperbolic equations for large times, J. Math. Mech., 12 (1963), 557-566.

[14] S. MIZOHATA, Sur l'analyticité de la fonction spectrale de l'opérateur Δ relatif au problème extérieur, Proc. Japan Acad., 39 (1963), 352-357.

[15] S. MIZOHATA, Théorie des équations aux dérivées partielles, Iwanami, Tokyo, 1965. (En japonais.)

[16] C. S. MORAWETZ, The decay of solutions of the exterior initial-boundary value problem for the wave equation, Comm. Pure Appl. Math., 14 (1961), 561-569.

[17] M. MORSE, The calculus of variations in the large, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 18, Amer. Math. Soc. Providence, R. I., 1934.

[18] L. SARASON, On hyperbolic mixed problems, Arch. Rat. Mech. Anal. 18 (1965), 310-334.

[19] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions, Hermann, Paris, 1966. (Nouvelle édition.)

[20] K. YOSIDA, Functional analysis, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1965.

[21] M.MATSUMURA, Comportement des solutions de quelques problème mixtes pour certains systèmes hyperboliques symétriques à coefficients constants à paraître Publ. RIMS,Kyoto Univ. Ser. A, Vol.4, No1.2 (1968)